

Похибки вимірювань

1. Випадкові та систематичні похибки

Різницю між вимірним та істинним значеннями вимірюваної величини називають похибкою вимірювання.

Похибки в ході вимірювань фізичних величин поділяють на два види: *випадкові та систематичні*.

Випадкові похибки пов'язані з *процесом вимірювання*.

Найбільш імовірне значення вимірюваної величини ($x_{\text{вимір}}$) дорівнює середньому арифметичному значень, отриманих у результаті вимірювань:

$$x_{\text{вимір}} = x_{\text{сеп}} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N},$$

де N — кількість вимірювань величини x ; x_1, x_2, \dots, x_N — результати 1-го, 2-го, ..., N -го вимірювань.

Випадкова абсолютна похибка ($\Delta x_{\text{вип}}$) обчислюється за формулою

$$\Delta x_{\text{вип}} = \sqrt{\frac{(x_1 - x_{\text{сеп}})^2 + (x_2 - x_{\text{сеп}})^2 + \dots + (x_N - x_{\text{сеп}})^2}{N}}$$

Якщо вимірювання проводиться тільки один раз, то зазвичай вважають, що випадкова абсолютна похибка дорівнює половині ціни поділки шкали приладу.

Систематичні похибки визначаються якістю приладу — його класом, тому їх часто називають *похибками приладу*, або *інструментальними похибками*.

Абсолютні інструментальні похибки приладів, якими ви будете користуватися, наведені в табл. 1.

2. Визначення абсолютної та відносної похибок прямих вимірювань

Щоб правильно оцінити точність експерименту, необхідно враховувати як систематичну похибку, обумовлену приладом ($\Delta x_{\text{прил}}$), так і випадкову похибку ($\Delta x_{\text{вип}}$), пов'язану з похибками вимірювань. Сумарну похибку називають абсолютною похибкою вимірювання

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{\text{прил}})^2 + (\Delta x_{\text{вип}})^2}.$$

(Δx) і визначають за такою формулою:

Відносна похибка ε_x характеризує якість вимірювання, вона дорівнює відношенню абсолютної похибки (Δx) до середнього (виміряного) значення вимірюваної величини ($x_{\text{вимір}}$):

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_{\text{вимір}}}.$$

Відносну похибку іноді називають *точністю*.

Найчастіше відносну похибку подають у відсотках:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_{\text{вимір}}} \cdot 100\%.$$

№ з/п	Засіб вимірювання	Ціна поділки шкали	Абсолютна інструментальна похибка
1	Лінійка учнівська (демонстраційна)	1 мм (1 см)	±1 мм (±0,5 см)
2	Стрічка вимірювальна	0,5 см	±0,5 см
3	Штангенциркуль	0,1 мм	±0,05 мм
4	Мікрометр	0,01 мм	±0,005 мм
5	Секундомір	0,2 с	±1 с за 30 хв
6	Терези навчальні	—	±0,01 г
7	Динамометр навчальний	0,1 Н	±0,05 Н
8	Термометр лабораторний	1 °С	±1 °С
9	Амперметр шкільний	0,1 А	±0,05 А
10	Вольтметр шкільний	0,2 В	±0,15 В

3. Визначення абсолютної та відносної похибок непрямих вимірювань

Багато фізичних величин неможливо виміряти безпосередньо. Їх *непряме вимірювання* складається з двох етапів. Спочатку вимірюють величини x , y , z , які можна виміряти методом прямих вимірювань і за допомогою яких можна обчислити потрібну величину f . Потім, використовуючи виміряні значення x , y , z , обчислюють шукану величину. Наведена табл. 2 дозволяє визначити похибки вимірювання

Формула	Абсолютна похибка	Відносна похибка
$f = x + y$	$\Delta f = \Delta x + \Delta y$	$\varepsilon_f = \frac{\Delta x + \Delta y}{x + y}$
$f = x - y$	$\Delta f = \Delta x + \Delta y$	$\varepsilon_f = \frac{\Delta x + \Delta y}{x - y}$
$f = xy$	$\Delta f = x\Delta y + y\Delta x$	$\varepsilon_f = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
$f = \frac{x}{y}$	$\Delta f = \frac{x\Delta y + y\Delta x}{y^2}$	$\varepsilon_f = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
$f = x^n$	$\Delta f = nx^{n-1} \cdot \Delta x$	$\varepsilon_f = n\varepsilon_x = \frac{n\Delta x}{x}$
$f = \sqrt[n]{x}$	$\Delta f = \frac{\Delta x}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\varepsilon_f = \frac{1}{n}\varepsilon_x = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Delta x}{x}$

величин, що обчислюються за різними формулами.

Якщо формула, що визначає фізичну величину f , містить тільки операції множення і ділення, то відносна похибка цієї величини дорівнює сумі відносних похибок величин, які входять у формулу.

Абсолютну похибку Δf непрямих вимірювань можна знайти, користавшись означенням відносної похибки ϵ_f .

$$\text{Дійсно, за означенням, } \epsilon_f = \frac{\Delta f}{f_{\text{вимір}}} \text{ звідси } \Delta f = \epsilon_f \cdot f_{\text{вимір}}.$$

Іноді проводять експеримент, щоб з'ясувати, чи справджується деяка рівність (наприклад, $X = Y$). Якщо в такому експерименті важко оцінити похибку, то відносну похибку експериментального підтвердження рівності $X = Y$ обчислюють за формулою

$$\epsilon = \left| \frac{X}{Y} - 1 \right| \cdot 100\%.$$

4. Як правильно записати результати вимірювання

Абсолютна похибка вимірювання визначає точність, з якою доцільно проводити обчислення вимірюваної величини.

Абсолютну похибку завжди округлюють до однієї значущої цифри із завищенням, а результат вимірювання — до величини розряду, що залишився в абсолютній похибці після округлення.

Остаточний результат для значення величини x записується у вигляді: $x = x_{\text{вимір}} \pm \Delta x$, де $x_{\text{вимір}}$ — середнє (виміряне) значення.

Ця формула означає, що істинне значення вимірюваної величини лежить у проміжку між $x = x_{\text{вимір}} - \Delta x$ і $x = x_{\text{вимір}} + \Delta x$ (рис. 1). Абсолютну похибку Δx прийнято вважати додатною величиною, тому $x = x_{\text{вимір}} + \Delta x$ — найбільше ймовірне значення вимірюваної величини, а $x = x_{\text{вимір}} - \Delta x$ — найменше ймовірне значення вимірюваної величини.

Наведемо приклад. Було виміряно прискорення вільного падіння g . У результаті опрацювання отриманих експериментальних даних було знайдено середнє значення: $g_{\text{вимір}} = 9,736 \text{ м/с}^2$. Для абсолютної похибки було отримано: $\Delta g = 0,123 \text{ м/с}^2$. Абсолютну похибку потрібно округлити до однієї значущої цифри із завищенням: $\Delta g = 0,2 \text{ м/с}^2$. Тоді результат вимірювання округляється до того ж розряду, що й розряд похибки, тобто до десятих: $g_{\text{вимір}} = 9,7 \text{ м/с}^2$.



Рис. 1

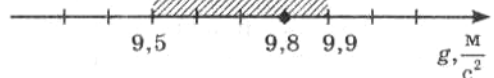


Рис. 2

Відповідь за підсумками експерименту слід подати в такому вигляді: $g = (9,7 \pm 0,2) \text{ м/с}^2$, при цьому істинне значення прискорення

вільного падіння перебуває в інтервалі $[9,5; 9,9]$ м/с² (рис. 2). Оскільки табличне значення прискорення вільного падіння ($g_{\text{табл}}=9,8$ м/с²) належить цьому інтервалу, то кажуть, що *отримані результати збіглися з табличними в межах похибки вимірювань*.

5. Графічний метод опрацювання результатів

Іноді опрацювання результатів експерименту можна значно полегшити, якщо подати їх у вигляді графіка. Припустимо, необхідно виміряти жорсткість пружини. Вирішили скористатися

формулою $k = \frac{F_{\text{пруж}}}{x}$.

Для одержання найбільш точного результату виміряли подовження пружини для різних значень сили пружності й отримали такі результати:

$F_{\text{пруж}}, \text{ Н}$	0,0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8
$x, \text{ м}$	0,0	0,022	0,040	0,068	0,090	0,101	0,123	0,150

Позначимо наведені в таблиці експериментальні дані хрестиками, відклавши по осі ординат значення сили пружності, а по осі абсцис — відповідні їм значення подовження пружини (рис. 3).

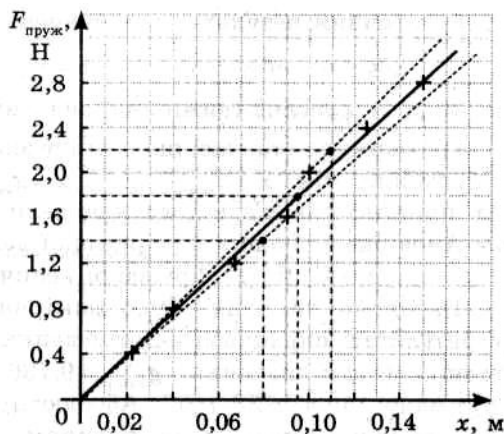


Рис. 3

Оскільки коефіцієнт жорсткості не залежить від подовження пружини, графік залежності $F_{\text{пруж}}$ від x повинен мати вигляд прямої лінії, що проходить через початок координат. Проведемо цю пряму таким чином, щоб з обох боків від неї була приблизно однакова кількість хрестиків. Вибравши на графіку довільну точку й знайшовши для неї відповідні

значення $F_{\text{пруж}}$ і x , визначимо середнє значення жорсткості:

$$k_{\text{сер}} = \frac{F_{\text{пруж}}}{x} = \frac{1,8 \text{ Н}}{0,095 \text{ м}} = 18,9 \text{ Н/м.}$$

Таким чином, побудова графіка дозволила, використовуючи всі наявні експериментальні дані, знайти середнє значення жорсткості пружини без складних обчислень.

За допомогою графіків, побудованих за результатами вимірювань, можна також оцінити випадкові похибки цих вимірювань. Наприклад, якщо отримана за результатами експерименту пряма проходить через початок координат (як у випадку графіка $F_{\text{пруж}}(x)$), необхідно провести допоміжні лінії-графіки так, щоб вони пройшли через ті експериментальні точки, які зададуть: а) *максимальний кут нахилу графіка*; б) *мінімальний кут нахилу графіка* (на рис. 3 ці лінії-графіки показано пунктиром). Для кожного з отриманих допоміжних графіків потрібно знайти відповідні значення величини, яку визначають $|k_{\text{сер}} - k'|$ і $|k_{\text{сер}} - k''|$: - у нашому випадку k' і k'' , а потім модулі різниць

$$k' = \frac{2,2 \text{ Н}}{0,11 \text{ м}} = 20 \text{ Н/м}, \quad k'' = \frac{1,4 \text{ Н}}{0,08 \text{ м}} = 17,5 \text{ Н/м};$$

$$|k_{\text{сер}} - k'| = |18,9 - 20| = 1,1 \text{ (Н/м)}, \quad |k_{\text{сер}} - k''| = |18,9 - 17,5| = 1,4 \text{ (Н/м)}.$$

Більшу із цих різниць (1,4 Н/м) і приймають за абсолютну випадкову похибку Δk .